УДК 28.19.31

МЕТОДЫ УПАКОВКИ ЗАДАННОГО ОБЪЕМА СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

Пузренков А.Н., Сальников И.И.

Пензенский государственный технологический университет, Пенза, e-mail: master_say@mail.ru

В работе представлены результаты исследования упаковки элементов сыпучих веществ в виде одинаковых сфер, что является актуальной задачей в настоящее время, поскольку эти исследования позволяют определить параметры сыпучих материалов. Элемент сыпучего материала в виде сферы является наиболее простой формой. Рассмотрены также элементы в виде эллипсоидов. Приводятся расчеты числа элементов сыпучих материалов при ортогональной и гексагональной упаковке. Показано, сыпучие элементы в виде сфер занимают всего лишь половину объема емкости в виде параллелепипеда. Реально для сыпучих материалов ортогональная упаковка неустойчивая, поэтому в статье рассмотрена гексагональная упаковка, коэффициент заполнения объема емкости для которой существенно увеличивается. Рассмотрена свободная гексагональная упаковка сфер без наличия ограничительных плоскостей. Для данного варианта упаковки выполнен анализ сил, действующих на сферы. Это сила тяжести и сила трения. В данном случае под действием силы тяжести, которая будет равна силе нормального давления, сферы будут выведены из положения покоя и приведены в движение. Так как вышестоящий объект опирается на нижестоящий, то движение прекратится тогда, когда будет принято устойчивое положение. Постоянное по величине давление вызывает скольжение соприкасающихся слоев объектов сыпучих материалов один относительно другого.

Ключевые слова: сыпучие материалы, объем, ортогональная упаковка, гексагональная упаковка, упаковка сфер, эллипсоид

METHODS OF PACKING OF SPECIFIC VOLUME OF LOOSE MATERIALS, CONSISTING FROM THE ELEMENTS OF THE VARIOUS FORM

Puzrenkov A., Salnikov I.I.

Penza State Technological University, Penza, e-mail: master_say@mail.ru

In work the outcomes of a research of packing of the elements of loose substances as identical orbs are represented, that is the actual task now, as these researches allow to define (determine) parameters of loose materials. The element of a loose material as an orb is the most simple form. The elements as ellipsoids are considered also. The calculations of number of the elements of loose materials are reduced at orthogonal and hexagonal packing. Is shown, the loose elements as orbs take only half of volume of a capacity as a parallelepiped. Really for loose materials the orthogonal packing unstablis, therefore in a paper is considered hexagonal packing, space factor of volume of a capacity for which is essentially increased. The free hexagonal packing of orbs without presence of restraining planes is considered. For the given variant of packing the analysis of forces, operating on orbs is carried out. It is gravity and force of friction. In this case by gravity, which will be equal to a force of normal pressure, the orbs will be deduced(removed) from a position of rest and are reduced in driving. As the higher plant leans on lower, the driving will be stopped then, when the steady position will be accepted. Constant on magnitude the pressure calls a sliding of adjoining stratums of plants of loose materials one concerning another.

Keywords: loose materials, volume, orthogonal packing, hexagonal packing, packing of orbs, ellipsoid

Ортогональная упаковка сфер. Рассмотрим наиболее простой случай ортогональной упаковки сыпучего материала, состоящего из элементов сферической формы радиусом r, при этом емкость имеет форму параллелепипеда размерами L x B x H (рис. 1). Определим максимально плотную упаковку одинаковых сфер, которые могут поместиться в объем заданной ёмкости. Количество сфер радиусом r, которые будут занимать весь внутренний объем параллелепипеда (рис.1,а), равна целой части от выражения:

$$N_{ort} = \left]\frac{LBH}{8r^3}\right[. \qquad (1)$$

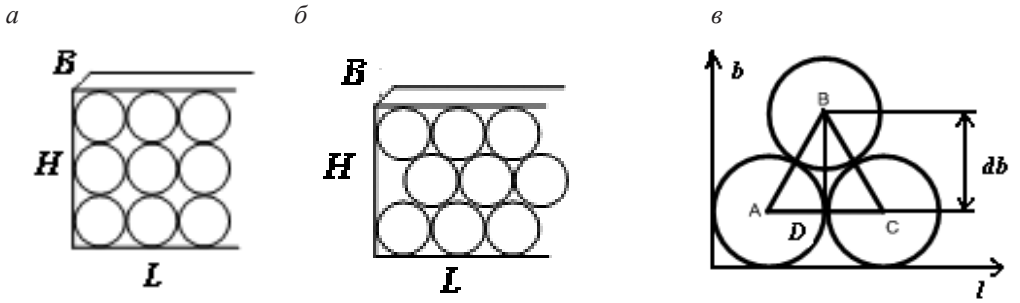

Рис. 1. Упаковки сфер в объеме параллелепипеда:
а – ортогональная, б – гексагональная, в – равносторонний треугольник ABC

Ортогональная упаковка неплотная. Коэффициент заполнения объема при ортогональной упаковке равен отношению объема сфер к объему параллелепипеда:

$$K_{ort} = \frac{V_O}{V_P} = \frac{N_{ort}}{LBH} = \frac{4\pi r^3 LBH}{3 \cdot 8 r^3 LBH} = \frac{\pi}{6} = 0,523. \quad (2)$$

Гексагональная упаковка сфер. Рассмотрим случай гексагональной упаковки сфер (рис. 1,б). Эта упаковка является более плотной [1, 2]. На рис. 1,в показано, что при гексагональной упаковке линии, соединяющие центры сфер представляют собой равносторонний треугольник *ABC,* при этом углы равны 60° или $\frac{\pi}{3}$.

Для размера *L* число сфер будет уменьшаться на 1 для четных рядов (рис. 1,б). Число сфер должно быть целым числом:

$$N_{L,hex} = \left(\frac{L}{d} + \left(\frac{L}{d} - 1\right)\right)\frac{1}{2} = \left]\frac{L}{d} - 0,5\right[, \quad (3)$$

где *d* – диаметр сфер.

Для размера *B* расстояние между слоями сфер будет уменьшаться, причем нижний слой и верхний слой будут иметь размеры, равные *d*, а размеры внутренних слоев будут уменьшаться на величину $(d - d\sin 60^\circ)$ (рис. 1,в). С учетом этого, число сфер по направлению *B* будет равно

$$N_{B,hex} = \frac{(B-d)}{d\sin 60^\circ} + d = \left]\frac{2(B-d)}{d\sqrt{3}} + d\right[, \quad (4)$$

где число сфер должно быть также целым числом.

Используя выражение (4) для *B* = 6, получим

$$N_{6,hex} = \left]\frac{2(6-1)}{\sqrt{3}} + 1\right[= 6,$$

то есть общее уменьшение расстояния между слоями меньше 1. А если взять *B* для 8 слоев, то из (4) следует

$$N_{8,hex} = \left]\frac{2(8-1)}{\sqrt{3}} + 1\right[= 9,$$

то есть при $B \geq 8$ начинается добавление слоев из-за гексагональной упаковки сфер. Например, для *B* = 100,

$$N_{100,hex} = \left]\frac{2(100-1)}{\sqrt{3}} + 1\right[= 115.$$

Для размера *H* расстояние между слоями сфер будет также как для размера *M* уменьшаться, причем также нижний слой и верхний слои будут иметь размеры, равные диаметру *d* , а размеры внутренних слоев будут уменьшаться на величину $(d - d\sin 60^\circ)$, аналогичную (рис. 1,в). С учетом этого, число сфер по направлению *H* будет равно:

$$N_{H,hex} = \frac{(H-d)}{d\sin 60^\circ} + d = \left]\frac{2(H-d)}{d\sqrt{3}} + d\right[, \quad (5)$$

где число сфер должно быть также целым числом.

Общее число сфер в прямоугольном объеме *HML* с учетом (3), (4), (5) будет равно:

$$N_{HBL,hex} = \left]\frac{2(H-d)}{d\sqrt{3}} + d\right[\times$$
$$\times \left]\frac{2(B-d)}{d\sqrt{3}} + d\right[\cdot \left]\frac{L}{d} - 0,5\right[. \quad (6)$$

Гексагональная упаковка более плотная. Коэффициент заполнения объема при гексагональной упаковке равен аналогично (2) отношению объема сфер к объему параллелепипеда:

$$K_{hex} = \frac{V_O}{V_P} = N_{HBL,hex} \cdot \frac{4\pi r^3 \cdot d^3}{3 \cdot HBL}. \quad (7)$$

Определим объем всех сфер в прямоугольном параллелепипеде с размерами $H = 10 \cdot d$; $B = 10 \cdot d$; $L = 10 \cdot d$. Для $d = 1$, используя (6), получим число сфер при гексагональной упаковке

$$N_{HBL,hex} = (\frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} + 1) \cdot (\frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} + 1) \cdot (10 - 0,5) =$$
$$= 1234,2. \quad (8)$$

Коэффициент заполнения объема при гексагональной упаковке будет равен:

$$K_{hex} = \frac{V_O}{V_P} = 1234,2\frac{4\pi r^3}{3HBL \cdot d} = 0,646, \quad (9)$$

что на 22,75% выше чем для ортогональной упаковки сфер.

Ортогональная упаковка эллипсоидов**.** В емкости формой прямоугольного параллелепипеда *HBL* расположены эллипсоиды. Определим объем всех эллипсоидов, ориентированных ортогональным образом (рис. 2).

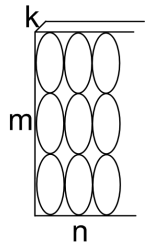

Рис. 2. Ортогональная упаковка эллипсоидов

Объем эллипсоида вычисляется по формуле [3]

$$V_{\text{элпс}} = \frac{4}{3}\pi abc, \qquad (10)$$

где abc – любые неотрицательные числа.

В отличие от сферы, где $a = b = c$ у эллипсоида имеется три различных диаметра.

Вывод формул количества эллипсов и незанятого объема прямоугольного параллелепипеда аналогичен выводу формул для сферы. Количество эллипсов высчитывается перемножением соответствующих формул (10) и (1)

$$\frac{4\pi \cdot abc}{3}\frac{m}{abc}\frac{n}{abc}\frac{k}{abc} = \frac{4\pi \cdot mnk}{3a^2b^2c^2}. \qquad (11)$$

Незанятый объем прямоугольного параллелепипеда

$$mnk - \frac{4\pi \cdot mnk}{3a^2b^2c^2} = \frac{3a^2b^2c^2 \cdot mnk - 4\pi \cdot mnk}{3a^2b^2c^2} = \frac{mnk(3a^2b^2c^2 - 4\pi)}{3a^2b^2c^2}. \qquad (12)$$

Следующий вариант – гексагональная (рис. 3а) и другие упаковки эллипсоидов (рис. 3с).

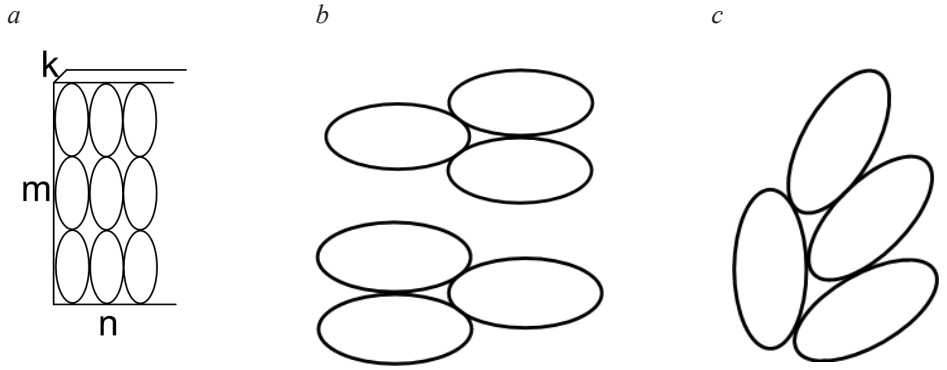

Рис. 3. Гексагональные виды упаковок эллипсоидов

При расположении эллипсоидов на рис. 3 необходимо определить количество эллипсоидов и незанятый объем прямоугольного параллелепипеда, используя различные ориентации треугольников, сформированных из центров эллипсоидов.

Свободная гексагональная упаковка сфер без наличия ограничительных плоскостей. Для данного варианта упаковки необходимо выполнить анализ сил, действующих на сферы. На сферы, находящиеся, в емкости действуют две основные силы: сила тяжести (рис. 4,а) и сила трения (рис. 4,б).

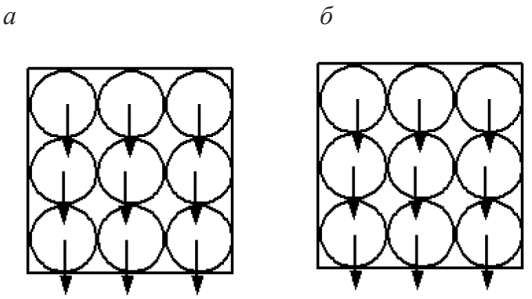

Рис. 4. а – сила тяжести сфер; б – сила трения между сферами

Поскольку сыпучие материалы подчиняются физическим законам, как твердых веществ, так и жидкостей, то в них будут действовать силы трения внешние и внутренние. Внешние силы действуют в покое между сферами. Внутренние будут действовать в случае движения сфер, например, если убрать боковые стенки (рис. 5)

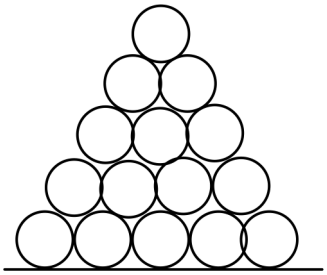

Рис. 5. Положение сфер в случае отсутствия боковых стенок

Сила трения скольжения F_{fr} пропорциональна силе нормального давления P_n, с которой оно действует на другое тело [4, 5]. Коэффициент K_{fr} определяет трение скольжения, зависящее от свойств соприкасающихся поверхностей.

$$F_{fr} = K_{fr} P_n . \qquad (10)$$

В данном случае под действием силы тяжести, которая будет равна силе нормального давления, сферы будут выведены из положения покоя и приведены в движение. Так как вышестоящий объект опирается на нижестоящий, то движение прекратится тогда, когда будет принята устойчивое положение. Постоянное по величине давление вызывает скольжение соприкасающихся слоев объектов сыпучих материалов один относительно другого. В результате центральные слои будут двигаться со значительно большей скоростью, чем возле стенок и дна [6].

Исследования упаковки одинаковых сфер является актуальной задачей в настоящее время, поскольку эти исследования развивают задачи определения параметров сыпучих материалов. Кроме того данное исследование поможет наиболее плотно разместить какой-либо сыпучий материал в заданной емкости.

Список литературы

1. Плотная упаковка шаров [Электронный ресурс] // Плотная упаковка шаров [1987 Асламазов Л.Г., Варламов А.А. – Удивительная физика. Библиотечка «Квант». Выпуск 63]. – URL: http://physiclib.ru/books/item/f00/s00/z0000062/st029.shtml (дата обращения: 02.10.2018).

2. Яглом И.М. Проблема тринадцати шаров. – Киев: Вища школа, 1975. – 84 с.

3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. / Изд-во «Наука», 1974. – 479 с.

4. Арестов В.В., Бабенко А.Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. – 1997. – Т. 219. – С. 44–73.

5. Трофимова Т.И. Курс физики. – 11-е изд., стер. – М.: Академия, 2006. – 560 с.

6. Ливенцев Н.И. Курс физики: для медвузов / Н.М. Ливенцев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1966. – 519 с.